Paul-Klee-Gymnasium
Q11/Q12 08.018.2015

Aufgabenblatt für Wiederholung vor der Q12

11cm214

1. Geben Sie für folgende Funktionen die Definitionsmenge D an ($G = \mathbb{R}$):

(a) $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 - 4x + 4}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - 2}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{2x + x^7}{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{2x^4 - x^2}{0{,}01x^2 - 1}$

(f) $f_6(x) = \dfrac{5x + 17}{0{,}64x^2 + 1{,}12x + 0{,}49}$

Lösung:
(a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
(b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4} = (\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$
(c) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}(x-2)(x+2) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}2\}$
(d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
(e) $0{,}01x^2 - 1 = (0{,}1x - 1)(0{,}1x + 1) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-10, 10\}$
(f) $0{,}64x^2 + 1{,}12x + 0{,}49 = (0{,}8x + 0{,}7)^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{8}\}$

11rr168

2. Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \sqrt{7\,x + 4}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5\,x + 6}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 9}}$ (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4\,x + 4}}{\sqrt{2\,x^2 + 20\,x + 60}}$

(e) $f(x) = \dfrac{(4\,x - 9)^{\frac{1}{2}}}{18 - 8\,x}$ (f) $f(x) = \dfrac{\lg(x^2 - x)}{\sqrt{x + 2}}$

(g) $f(x) = \lg(6\,x - x^2 - 9)$ (h) $f(x) = \sqrt{6\,x - x^2 - 9}$

Lösung:
(a) $D_f = \left[-\frac{4}{7}\,;\, +\infty\right[$ (b) $D_f = \left]-\infty\,;\, 2\right] \cup \left[3\,;\, +\infty\right[$
(c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ (d) $D_f = \mathbb{R}$
(e) $D_f = \left]\frac{9}{4}\,;\, +\infty\right[$ (f) $D_f = \left]-2\,;\, 0\right[\cup \left]1\,;\, +\infty\right[$
(g) $D_f = \{\}$ (h) $D_f = \{\,3\,\}$

11rr234

3. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

(a) In welchen x-Bereichen ist $f(x)$ positiv, in welchen negativ?

(b) Gib den maximalen Definitionsbereich D_f von f an und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

(c) Zeichne den Grafen von f in geeigneten Einheiten.

(d) Für welche x ist $f(x) > 100$?

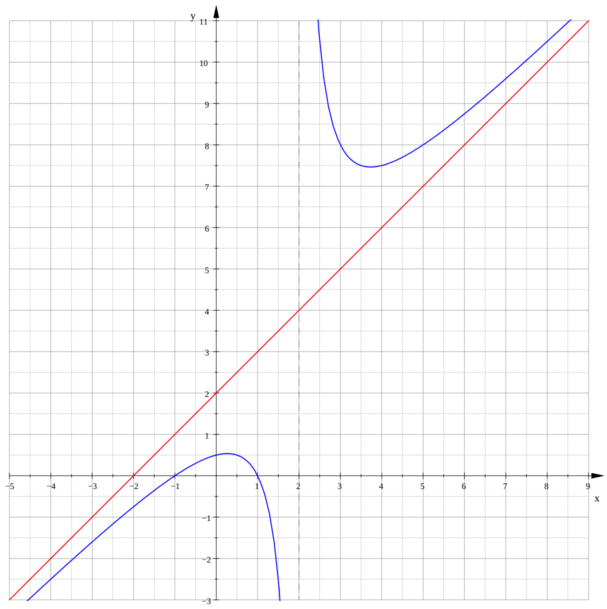
Lösung: (a)

	$]-\infty, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, 2[$	$]2, \infty[$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-2} \quad \Longrightarrow \quad$ schräge Asymptote: $y = x + 2$

(c)

x	$f(x)$
$-4{,}0$	$-2{,}50$
$-2{,}0$	$-0{,}75$
$-1{,}0$	$0{,}00$
$0{,}0$	$0{,}50$
$1{,}0$	$0{,}00$
$1{,}5$	$-2{,}50$
$2{,}5$	$10{,}50$
$3{,}0$	$8{,}00$
$4{,}0$	$7{,}50$
$5{,}0$	$8{,}00$
$7{,}0$	$9{,}60$



(d) $f(x) > 100$ kommt nur für $x > 2$ in Frage: $\quad \Longrightarrow \quad x - 2 > 0 \quad \Longrightarrow$

$$\frac{x^2-1}{x-2} > 100$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 > 100x - 200$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 100x + 50^2 > 2301$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x - 50| > \sqrt{2301}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > 50 + \sqrt{2301} \vee x < 50 - \sqrt{2301}$$

oder ungefähr $\quad x > 97{,}9687 \vee x < 2{,}03126$

$$f(x) > 100 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]2, 50 - \sqrt{2301}[\cup]50 + \sqrt{2301}, \infty[$$

11rr021 4. $f(x) = \dfrac{(3-x)(x^2-4)}{5(x+2)}$; zeichnen Sie G_f und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

Lösung: -4

11cm124 5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$,
$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2}$,
$\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$

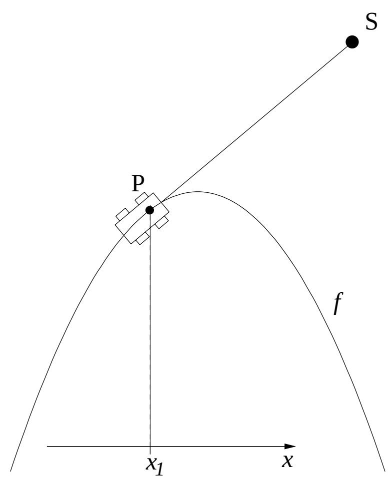
(c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$,
$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$

Lösung: (a) 0, 4, 0, 2
(b) 4 ,12 ,1 ,-3
(c) 2, -1, 2, 0

11rr212 6. Ein Auto fährt (in Richtung größer werdender x-Werte) entlang einer Straße, deren Verlauf durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

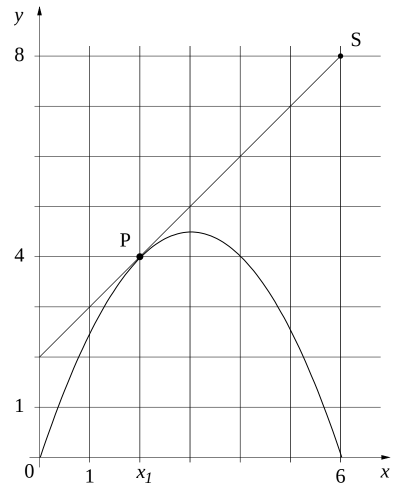
gegeben ist. Wo befindet sich der Wagen (Punkt $P\,(x_1|f(x_1))$), wenn seine Scheinwerfer, deren Strahl immer tangential zur Straße verläuft, gerade das alte Schloss am Ort $S\,(6|8)$ erhellen? Zeichnung und Rechnung!



Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{8-f(x_1)}{6-x_1} &= f'(x_1) = -x_1+3 \\
8-f(x_1) &= (6-x_1)(-x_1+3) \\
8+\frac{x_1^2}{2}-3x_1 &= 18-9x_1+x_1^2 \\
\frac{x_1^2}{2}-6x_1 &= -10 \\
x_1^2-2\cdot 6x_1+6^2 &= 36-20=16 \\
x_1 &= 6\pm 4
\end{aligned}
$$

$x_1 = 2$ (bei $x_1 = 10$ zeigen die Rückstrahler zum Schloss), also P $(2|4)$.



11rr210

7. Wir betrachten die Funktionen f und g mit den Termen

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{5}{x}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten von G_f und schreiben Sie $f(x)$ in der Scheitelform hin.

(c) Erstellen Sie eine Wertetabelle für f und g für alle ganzzahligen x-Werte im Intervall $[-1; 4]$. In welchem Punkt S schneiden sich also f und g? Zeichnen Sie die Grafen von f und g im Intervall $[-1; 4]$ in ein Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Wertetabelle in geeigneter Weise.

(d) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an G_g im Punkt S auf. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Tangente mit den Koordinatenachsen an.

(e) Zeichnen Sie die Tangenten an die beiden Funktionsgrafen in S ein und berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Grafen.

Lösung: (a) $f'(x) = x + 1, \quad g'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$.

(b) $f'(x_s) = x_s + 1 = 0, \quad x_s = -1, \quad y_s = f(x_s) = -2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

(c)

x	-1	0	1	2	3	4
f	-2	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6	$10{,}5$
g	-5	$-$	5	$2{,}5$	$1{,}67$	$1{,}25$

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$
f	$-1{,}875$	$-0{,}875$	$1{,}125$	$4{,}125$
g	-10	10	$3{,}33$	2

Schnittpunkt: S $(2|2{,}5)$

(d) $g'(2) = -\frac{5}{4}$, $\quad t(x) = -\frac{5}{4}x + b$

S $\in t$: $\quad t(2) = g(2) = \frac{5}{2} = -\frac{5}{4} \cdot 2 + b$

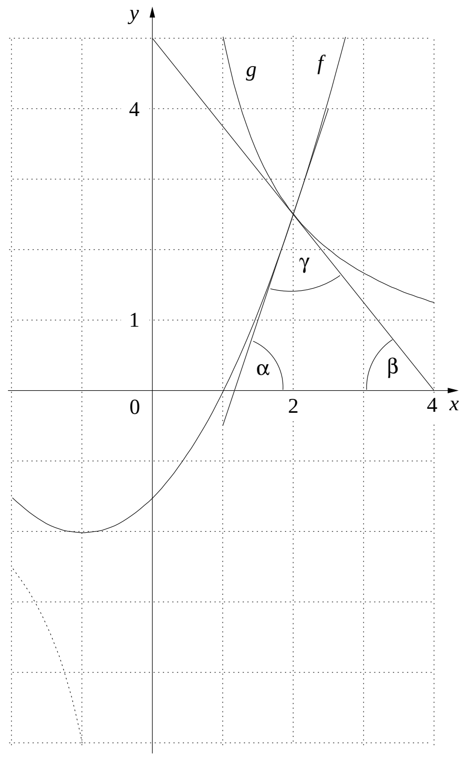
$\Longrightarrow \quad b = 5, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + 5$

Schnittp. mit Achsen: $(0|5)$ und $(4|0)$

(e) $\tan\beta = |g'(2)| = 1{,}25, \quad \beta = 51{,}34°$

$\tan\alpha = f'(2) = 3, \quad \alpha = 71{,}57°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 57{,}1°$



11rr024

8. G_t sei die Tangente an G_f mit $f(x) = x^2$ im Punkt A $(a|f(a))$, G_n sei die Normale auf G_f in A. $\{P\} = (G_f \cap G_n)\setminus\{A\}$ und G_h ist die Tangente an G_f in P. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von G_t und G_h, jeweils ausgedrückt durch a! Auf welcher Kurve liegen alle möglichen Schnittpunkte S, wenn a alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft?

Lösung: $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = -\dfrac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

P $\left(p\middle|p^2\right)$ mit $p = -a - \dfrac{1}{2\,a}, \quad h(x) = 2\,p\,x - p^2, \quad$ S $\left(-\dfrac{1}{4\,a}\middle| -\dfrac{1}{2} - a^2\right)$

Kurve der Schnittpunkte S: $\quad y(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16\,x^2}$

11cm085

9. Berechnen Sie die Schnittpunkte und die Schnittwinkel folgender Funktionen ($D = \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = x^2 + x - 2$ und $g(x) = 2x$

(b) $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$ und $g(x) = x + 5$

(c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = 4x^2 - 4x - 6$

(d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = 5x^2 + 6x + 3$

Lösung: Schnittpunkt der Funktionen berechnen; Tangentensteigung von f bzw. g im Schnittpunkt berechnen; Schnittwinkel ist Winkel zwischen den Tangenten;

(a) $S_1(2|4), S_2(-1|-2)$, $\alpha_1 = 15{,}3°$, $\alpha_2 = 71{,}6°$

(b) $S(-1|4)$, $\alpha = 0°$ (Kurven berühren sich im Schnittpunkt)

(c) $S_1(3|18)$, $S_2(-1|2)$, $\alpha_1 = 4{,}3°$, $\alpha_2 = 85{,}2°$

(d) $S_1(-1|2)$, $\alpha = 0°$ (Kurven berühren sich im Schnittpunkt, Steigung der Tangenten im Schnittpunkt: 76,0°)

11cm091

10. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ und $g(x) = x^2 - 7x + 7$

(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen.

(b) Berechnen Sie für den Schnittpunkt mit der kleinsten x-Koordinate den Schnittwinkel der Funktionen.

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von $g(x)$ im Punkt $P(2|-3)$

Lösung: (a) $P_1(0|7), P_2(-2|25), P_3(-1|15)$

(b) $f'(-2) = -9 \Rightarrow \alpha_1 = -83{,}66°$
$g'(-2) = -11 \Rightarrow \alpha_2 = -84{,}81° \Rightarrow \alpha = 1{,}15°$

(c) $t(x) = -3x + 3$

11rr150

11. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t_a an $f(x)$ im Punkt $\mathrm{P}_a\,(a|f(a))$ mit $a > 0$.

(b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale n_a auf $f(x)$ im Punkt $\mathrm{P}_a\,(a|f(a))$ mit $a > 0$.

(c) T_a und N_a sind die Schnittpunkte von t_a und n_a mit der x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von T_a und N_a sowie die Länge $\overline{\mathrm{T}_a\mathrm{N}_a}$. Zeichnen Sie $f(x)$, t_4 sowie n_4 in *ein* Koordinatensystem!

(d) α sei der Schnittwinkel von t_a, β derjenige von n_a mit der x-Achse.
Für welches a gilt $\beta = 2 \cdot \alpha$?
Hinweis: Die Verwendung der Formelsammlung ist nicht verboten!

Lösung: (a) $t_a(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \cdot x + \dfrac{\sqrt{a}}{2}$

(b) $n_a(x) = -2\sqrt{a} \cdot x + (1 + 2a)\sqrt{a}$

(c) $\mathrm{T}_a(-a\,|\,0)$, $\quad \mathrm{N}_a\left(a + \frac{1}{2}\,|\,0\right)$, $\quad \overline{\mathrm{T}_a\mathrm{N}_a} = 2a + \dfrac{1}{2}$

(d) t_a und n_a stehen senkrecht aufeinander: $\alpha + \beta = 3\,\alpha = 90°$, $\quad \alpha = 30°$

$$\tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

11rr057

12. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{3 - x}$$

(a) Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und untersuchen Sie das Verhalten am Rande von D_f (Grenzwerte)!

(b) Monotoniebereiche und Punkte mit waagrechter Tangente!

(c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2; 8]$!

(d) Beweisen Sie, dass G_f punktsymmetrisch ist (das Zentrum Z ist dem Graphen zu entnehmen)!

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \mp\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$

f echt steigend in $]\,2\,;\,3\,[$ und in $]\,3\,;\,4\,[$

f echt fallend in $]-\infty\,;\,2\,[$ und in $]\,4\,;\,+\infty\,[$

Waagrechte Tangente bei $(\,2\,|\,4\,)$ und $(\,4\,|\,0\,)$

(d) Symmetriezentrum: $\mathrm{Z}\,(3|2) \quad , \quad 2 - f(3+h) = f(3-h) - 2$

$\boxed{\text{11rr239}}$

13. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2}{4x-8}$$

(a) Gib die maximale Definitionsmenge D_f und die Nullstellen von f an. Beweise durch eine ausführliche Rechnung, dass f auch in der Form

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x-2}$$

dargestellt werden kann.

(b) Untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?

(c) Berechne die erste Ableitung f' von f und die Nullstellen von f'.

(d) Zeichne den Grafen von f und die Asymptoten im x-Intervall $[-3; 7]$.

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Nullstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2\big) \div \big(4x-8\big) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \dfrac{4}{4x-8} \\ \underline{-\,x^2 + 2x} \\ \qquad\quad 2x \\ \qquad \underline{-\,2x + 4} \\ \qquad\qquad\ 4 \end{array}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{4-\frac{8}{x}} = \pm\infty$

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2\pm h) =$$

$$= 1 + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2\pm h - 2} = \pm\infty$$

schräge Asympt.: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Senkrechte Asympt.: $x = 2$

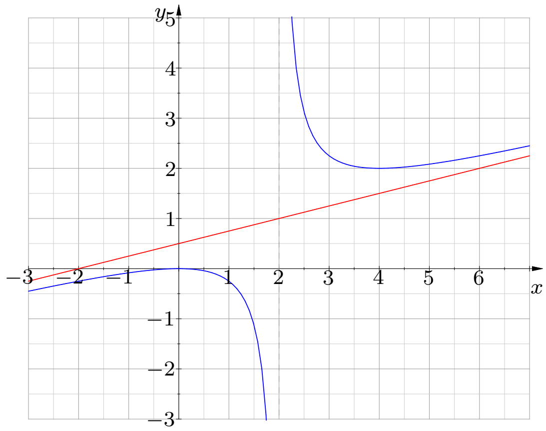
(c) $f'(x) = \dfrac{2x(4x-8) - x^2\cdot 4}{(4x-8)^2} = \dfrac{4x^2-16x}{(4x-8)^2} = \dfrac{4x(x-4)}{16(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 4$

(d)

x	$f(x)$
$-3{,}0$	$-0{,}450$
$-2{,}0$	$-0{,}250$
$-1{,}0$	$-0{,}08\overline{3}$
$0{,}0$	$0{,}000$
$1{,}0$	$-0{,}250$
$1{,}5$	$-1{,}125$

x	$f(x)$
$2{,}5$	$3{,}125$
$3{,}0$	$2{,}250$
$4{,}0$	$2{,}000$
$5{,}0$	$2{,}08\overline{3}$
$6{,}0$	$2{,}250$
$7{,}0$	$2{,}450$



11rr258

14. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$$

auf maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f und eventuelle Asymptoten im Intervall $[-1; 7]$.

Lösung: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \frac{(x-2)^2}{x-3}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\quad$ Nullstelle bei $x_0 = 2$

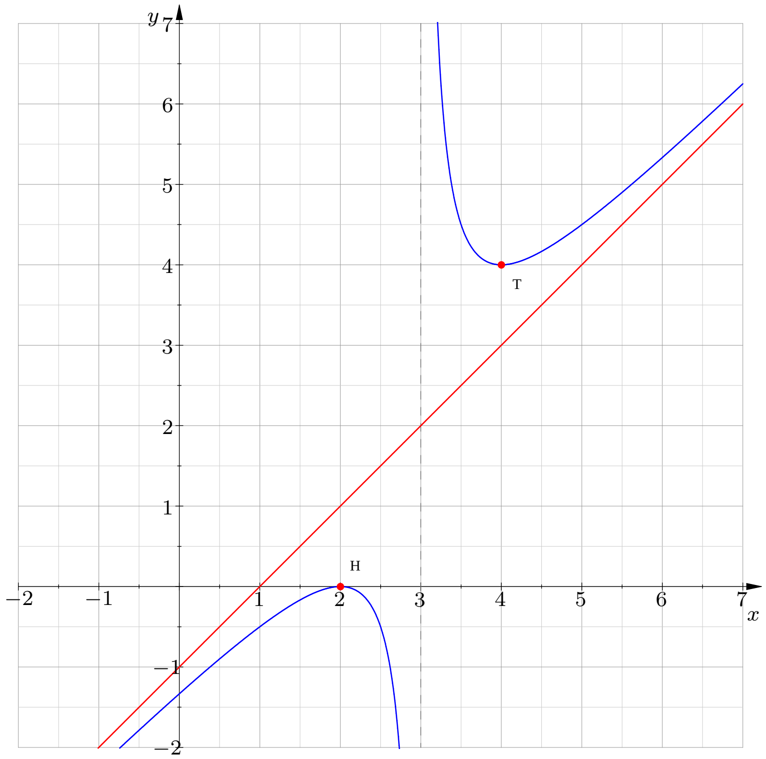
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 4 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty \qquad \lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \left(\frac{1}{0^\pm}\right) = \pm\infty$$

Polynomdivision $\implies$ $\quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3} \quad \implies \quad$ Asymptote: $a : x \to x - 1$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \implies \quad x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4$

Da $x^2 - 6x + 8$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt $f'(x) > 0$ für $x < 2$ und $x > 4$ sowie $f'(x) < 0$ für $2 < x < 3$ und $3 < x < 4$. f ist also streng steigend in $]-\infty; 2[$ und in $]4; +\infty[$ und streng fallend in $]2; 3[$ und $]3; 4[$ $\quad \implies \quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{H}\,(2|0)$ und Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(4|4)$.



$\boxed{\text{11rr246}}$ 15. Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ (b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (c) $h(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ (e) $r(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ (f) $s(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

(g) $t(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ (h) $u(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ (i) $v(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$

Lösung: (a) $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$

(b) $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$

(c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $k'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$

(e) $r'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$

(f) $s'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

(g) $t'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = (\cos x - \sin x)\mathrm{e}^{-x}$

(h) $u'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

(i) $v'(x) = \mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$

$\boxed{\text{11rr249}}$ 16. Berechne x:

(a) $(\ln x)^2 = 4$ (b) $\ln x = -10^5$ (c) $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt[3]{x} = 2$

(d) $\ln\sqrt{1-x^2} = -\dfrac{1}{2}$ (e) $\mathrm{e}^x = \ln x$ (f) $\mathrm{e}^x = -\ln x$

Veranschauliche das Ergebnis von (b) in der Form $0,\underbrace{0000\ldots000}_{\text{Zahl der Nullen}}$ nächste Ziffern.

Lösung: (a) $\ln x = \pm 2 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \mathrm{e}^2, \quad x_2 = \mathrm{e}^{-2}$

(b) $x = \mathrm{e}^{-10^5} = 10^{-\frac{-10^5}{\ln 10}} = 10^{-43429{,}44819} = 10^{-0{,}44819} \cdot 10^{-43429} = 0{,}35629 \cdot 10^{-43429}$

$$x = 0,\underbrace{0000\ldots000}_{\text{43429 Nullen}}35629\ldots$$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln x = \dfrac{5}{6}\ln x = 2 \quad\Longrightarrow\quad x = \mathrm{e}^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{12}} \approx 11{,}023$

(d) $\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\dfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad 1 - x^2 = \mathrm{e}^{-1} \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}} \approx \pm 0{,}795$

(e) keine Lösung

(f) Wir suchen eine Nullstelle von $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln x$ mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}$$

$$x \approx 0{,}2698741376$$

$x_0 = 0{,}5$
$x_1 = 0{,}2381071287$
$x_2 = 0{,}2684966975$
$x_3 = 0{,}2698717782$
$x_4 = 0{,}2698741376$
$x_5 = 0{,}2698741376$

$\boxed{\text{11rr251}}$ 17. Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{100}\mathrm{e}^{-0{,}01x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln x\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$

Lösung: (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim_{x\to a}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = 0$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}}{\mathrm{e}^{0{,}01x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{100 mal de l'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{100!}{0{,}01^{100}\mathrm{e}^{0{,}01x}} = 0$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\mathrm{e}^x} = 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}\right) = \infty$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right) = (\infty\cdot\infty) = \infty$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin x}{2x-\sin x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{2}{2} = 1$

12cm013

18. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \ln(a + e^{-(x-a)^2})$, $a > 0$, $D = R$.

    (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f mit der y-Achse und untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge.

    (b) Zeige, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch zu $x = a$ ist.

    (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extremums und geben Sie die Ortskurve $g(x)$ der Extrema an.

    (d) Zeichnen Sie die Ortskurve der Extrema und skizzieren Sie den Graphen von f_1
    (1LE $\hat{=}$ 2cm).

    (e) In der Umgebung des Maximums lässt sich die Funktion f_1 durch eine Parabel annähern, die den Graph von f_1 berührt und im Maximum die gleiche Krümmung hat. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. Verwende dabei $f_1''(1) = -1$.

Lösung: (a) $Y(0|\ln(a + e^{-a^2})$, $\lim_{x\to\pm\infty} = \ln a$
(b) $f(a + x') = f(a - x')$
(c) $Max(a|\ln(a + 1))$, Ortkurve: $g(x) = \ln(x + 1)$
(d)
(e) $p(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \ln 2$

12cm004

19. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (\frac{x}{t} + 1) \cdot e^{t-x}$ für $x \in R$ und $t > 0$.

    (a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten für $x \to \infty$.

    (b) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion ein Maximum und einen Wendepunkt hat und geben Sie die Koordianten des Extremums an.

    (c) Für welchen Wert von t ist das Maximum der Funktion am niedrigsten?

Lösung: (a) $(0|e^t)$, $(-t|0)$, $lim_{x\to\infty} = 0$.
(b) Max $(1 - t|\frac{1}{t}\, e^{2t-1})$, Wendepunkt bei $x = 2 - t$
(c) $t = \frac{1}{2}$

08in068

20. Bestimme jeweils Definitions- und Lösungsmenge:

    (a) $x - 2 - \dfrac{4}{x-2} = x \cdot \dfrac{x-4}{x-2}$

    (b) $\dfrac{-3x}{x+3} = \dfrac{-21}{x^2+3x} - \dfrac{3x-7}{x}$

    (c) $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-3}{2x-1}$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L = D$

(b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -3\}$, $L = \{\}$

(c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0,5; -1,5\}$, $L = \{-4,5\}$

08rr005 21. Gib die Definitionsmenge an und berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{4\,x^2-81} - \frac{14-3\,x}{6\,x-27} = \frac{2\,x-1}{4\,x+18}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{9}{2}\,;\,\frac{9}{2}\}$; $x = \frac{9}{2} \notin D \implies L = \{\}$

08in089 22. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge über $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x}{4x-6} - \frac{x+5}{6x+9} = 2 - \frac{17x^2-4}{12x^2-27}$$

Lösung: $G = \mathbb{Q} \setminus \{\pm\frac{3}{2}\}$, $L = \{-10\}$

08rw001 23. Gib für folgende Gleichung die Definitions- und die Lösungsmenge an ($G = \mathbb{Q}$)!

$$\frac{5x+2}{36-12x} - \frac{15}{6x^2-54} = \frac{5x+20}{12x+36} - \frac{5}{6}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$, $L = \{\}$

08in088 24. Löse nach x auf und bestimme die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r:

$$\frac{r-x}{x+r} - \frac{x+r}{r-x} = \frac{4(r^2+r)}{x^2-r^2}$$

Lösung: $r \neq 0$ und $r \neq -\frac{1}{2}$: $L = \{r+1\}$, $r = 0$: $L = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $r = -\frac{1}{2}$: $L = \{\}$

08rr006 25. Wir betrachten die Gleichung:
$$\frac{6\,x}{12\,x^2-75} - \frac{b}{4\,x^2-20\,x+25} = \frac{1}{2\,x+5} \qquad (1)$$

(a) Bestimme die Definitionsmenge D der Gleichung und berechne x zunächst ohne Berücksichtigung jeglicher Fallunterscheidung! Der Rechenweg zählt, nicht das Ergebnis!

(b) Das Ergebnis von Teilaufgabe (a) lautet: $x = \dfrac{5\,b+25}{10-2\,b}$

Bestimme jetzt die Lösungsmenge der Gleichung (1) mit Berücksichtigung aller Fälle für den Parameter b!

Lösung: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\}$
Der Lösungsterm ist nicht definiert für $b = 5$; für $b = 0$ ist $x = \frac{5}{2} \notin D$

$$\implies \quad L = \begin{cases} \{\} & \text{für} \quad b = 0 \text{ oder } b = 5 \\ \left\{\frac{5\,(5+b)}{2\,(5-b)}\right\} & \text{sonst} \end{cases}$$